Sonderdruck

aus

Physik und Didaktik

Bayerischer Schulbuch-Verlag

Peter Ostermann

Zur relativistischen Behandlung einfacher Bewegungsabläufe in abgeschlossenen Systemen

Bei der Bewegung von Teilchen in abgeschlossenen Systemen treten wegen der Relativität der Gleichzeitigkeit bemerkenswerte Fragen auf. Einige einfache Systeme wie *Teilchen in begrenztem Volumen* und *Ebener Rotator* werden zur Diskussion gestellt:
Aus der Nicht-Existenz starrer Körper ergibt sich, daß bei der Beschreibung von Teilchen in abgeschlossenen Systemen zumindest einer der beteiligten Körper als deformierbares Kontinuum mit unendlich vielen Freiheitsgraden zu behandeln ist. Der klassische Begriff des *Massenpunkts* kann also – im Gegensatz zur Newtonschen Theorie, wo dieser Begriff als ‚Massenmittelpunkt' auch auf *starre Körper* anwendbar ist – für sich allein genommen nicht die Basis einer relativistischen Mechanik sein.
Wo es sich bei Beteiligung ausgedehnter Körper um nicht-stationäre Abläufe handelt, gibt es prinzipiell keinen *elastischen Stoß*.
Insbesondere zeigt sich, daß eine periodische Bewegung zweier Teilchen in einem starren Kasten die Existenz von ‚Tachyonen' zur Voraussetzung hätte, und daß sich Energie und Impuls der Bestandteile abgeschlossener Systeme nicht nach den für freie Teilchen gültigen Formeln transformieren lassen.
Die Relativitätstheorie ist demzufolge nicht zu verstehen als bloß quantitativ modifizierte ‚klassische' Mechanik.

1. Einleitung

Welche Rolle spielt die Relativitätstheorie in der Entwicklung der Physik? Max Born bemerkt zu dieser Frage: „Soviel Neues die Relativitätstheorie auch gebracht hat, so ist sie doch mehr der Abschluß einer Entwicklung . . . als der Beginn einer neuen Periode. Eine solche setzt genau mit unserem Jahrhundert ein durch die Quantentheorie von Planck." [1, S. 27] Es ist wohl die bis heute vorherrschende Meinung, die in den hier zitierten Sätzen zum Ausdruck kommt.
So merkwürdige Phänomene wie Zeitdilatation und Längenkontraktion gehören zum Bereich der Kinematik; und läßt man die Äquivalenz von Masse und Energie einmal außer acht, dann sieht es aus, als wären die übrigen Neuerungen, welche die Relativitätstheorie auf dem Gebiet der Mechanik gebracht hat, im wesentlichen *quantitativer* Natur. Doch wie die folgenden Beispiele zeigen, kann diese Auffassung nicht richtig sein.
In einer Arbeit von 1907 [2] kommentiert Einstein die zwei Jahre zuvor gefundene Beziehung $\Delta E = \Delta mc^2$. Er fragt: „Führen nicht andere spezielle Fälle zu mit der genannten Annahme unvereinbaren Folgerungen?" und fährt fort: „Die *allgemeine* Beantwortung der aufgeworfenen Frage ist darum vorläufig nicht möglich, weil wir ein vollständiges, dem Relativitätsprinzip entsprechendes Weltbild einstweilen nicht besitzen." – Bekanntlich hat sich der oben erwähnte Zusammenhang zwischen Masse und Energie seit damals unzählige Male als richtig erwiesen und steht daher zu Recht längst außer Zweifel. Wie aber im folgenden anhand einiger Beispiele gezeigt werden soll, kann von einem ‚vollständigen, dem Relativitätsprinzip entsprechenden Weltbild' auch heute noch gar keine Rede sein.

2. Das Problem des elastischen Stoßes

In der oben zitierten Arbeit von 1907 hat Einstein gezeigt, daß die Existenz eines *starren Körpers* mit dem Kausalitätsprinzip unvereinbar ist, weil sonst Wirkungen ihren Ursachen vorausgehen könnten. Dazu betrachtet er einen Stab in seinem Schwerpunktsystem S, auf dessen Enden „für ganz kurze Zeit entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken". Aufgrund der Relativität der Gleichzeitigkeit, aufgrund der Tatsache also, daß die beiden Krafteinwirkungen von einem anderen, gegen das Schwerpunktsystem S bewegten Inertialsystem aus beurteilt zu verschiedenen Zeiten stattfinden, sieht sich Einstein „genötigt, bei Einwirkung des Impulses in A (rechtes Stabende) eine Zustandsänderung unbekannter Qualität im Körper anzunehmen, welche sich mit endlicher Geschwindigkeit in demselben ausbreitet und in kurzer Zeit eine Beschleunigung des Körpers bewirkt, falls innerhalb dieser Zeit nicht noch andere Kräfte auf den Körper wirken, deren Wirkung die der erstgenannten kompensieren". Einstein geht auf dieses Problem nicht weiter ein, sondern beläßt es bei der Feststellung, daß man „noch weit davon entfernt (ist), eine Dynamik der Paralleltranslation des starren Körpers zu besitzen".

Um zu zeigen, daß ein klassisches Denkmodell wie der *elastische Stoß* nicht ohne weiteres in einen relativistischen Rahmen paßt, genügt es, das von Einstein diskutierte Beispiel ein wenig zu modifizieren.

Dazu denke man sich die Krafteinwirkungen so zustandegekommen, daß zwei Körper gleicher Massen und entgegengesetzt gleicher Impulse an den beiden Stabenden gleichzeitig elastisch stoßen (s. Abb. 1).

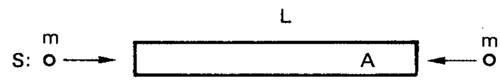

Abb. 1

Vom Standpunkt der Newtonschen Mechanik handelt es sich hier um einen einfachen Prozeß, bei dem auf den Stab insgesamt weder Energie noch Impuls übertragen wird. Wie aber hätte ein entsprechender Prozeß gemäß der Relativitätstheorie abzulaufen?

Wegen der augenscheinlichen Symmetrie dieses Vorgangs ist von vorneherein klar, daß der Stab insgesamt keinen Impuls aufnehmen kann. Und wie steht es mit der Energie?

Wenn es sich hier tatsächlich um einen elastischen Stoß handeln könnte, dann dürfte der Stab selbstverständlich keine Energie aufnehmen, d.h. er verhielte sich so, wie es aufgrund der klassischen Physik zu erwarten wäre. Gerade das kann aber keinesfalls richtig sein.

Denn angenommen, jeder der beiden Stöße braucht eine gewisse Zeitspanne Δt. Dann denke man sich den Stab von solcher Länge L, daß während der Stoßwechselwirkung an einem der beiden Enden kein von dort ausgehendes Signal das andere Stabende erreichen kann; d.h. es soll gelten $L > c\Delta t$. Unter dieser Voraussetzung handelt es sich bei beiden Stößen jedenfalls um relativ zueinander raumartige Prozesse, deren zeitliche Reihenfolge je nach Bezugssystem unterschiedlich beurteilt werden muß. Zwischen solchen Prozessen gibt es keinen kausalen Zusammenhang. Das aber bedeutet: Die beiden stoßenden Körper müssen auf die entsprechenden Stabenden eine Energiemenge übertragen, die ganz unabhängig davon ist, ob am entgegengesetzten Stabende ein Stoß erfolgt oder nicht. Letztlich ergibt sich aber daraus, daß der Stab an beiden Enden einen (gleichen) Energiebetrag aufnimmt; und weil sich dadurch sein Bewegungszustand nicht verändert, kann von einem *elastischen Stoß* gar keine Rede sein.

Offenbar verhält es sich so, daß bei Gebilden deren lineare Ausdehnung L eine gewisse kritische Länge $L^* = c\Delta t$ überschreitet, elastische Stöße in der oben dargestellten Art

nicht möglich sind (andererseits wäre es durchaus auch denkbar, daß die Stoßdauer Δt mit der Ausdehnung L der betreffenden Gebilde in einem solchen Zusammenhang steht, daß der Fall $L > c\Delta t$ gar nicht eintreten kann).
Da stellt sich nun aber die Frage: Wenn bei Körpern, deren Ausdehnung unterhalb der kritischen Länge L^* liegt, der hier diskutierte Prozeß entsprechend der Newtonschen Mechanik ablaufen könnte, bei größeren Gebilden dagegen nur noch inelastische Stöße möglich wären, wie hätte man sich dann den Ablauf vorzustellen, wenn die Ausdehnung L genau der kritischen Länge L^* entspricht? Sollte es mit zunehmender Stablänge L nicht einen *stetigen* Übergang vom zunächst vollkommen elastischen, bis hin zu oben beschriebenen inelastischen Stoß geben (bei dem der Stab gerade das doppelte der Energiemenge aufnimmt, die bei einem elastischen Stoß des Stabes mit nur einem der beiden Körper auf ihn übertragen würde)? Wie hätte man sich diesen Übergang vorzustellen? Hängt es vielleicht auch vom Material des Stabes ab, wieviel Energie übertragen wird?
Im Rahmen der Newtonschen Mechanik läßt sich *ohne weiteres* berechnen, wieviel Energie und Impuls auf jeden der beteiligten Körper bei einem elastischen Stoß übertragen wird, wenn nur die Massen und Geschwindigkeiten vor dem Stoß gegeben sind. Im Rahmen der Relativitätstheorie gelingt das nicht. Natürlich handelt es sich beim *elastischen Stoß* auch in der Newtonschen Mechanik um eine Idealisierung – aber: *bei Beteiligung ausgedehnter Körper ist ein solcher Prozeß für eine relativistische Mechanik nicht einmal als Idealisierung denkbar*. Woher sollte in unserem Beispiel einer der stoßenden Körper, der doch nur mit einem der Stoßdauer Δt entsprechenden Teilstück, d.h. mit einem Stück der Länge $c\Delta t$ des Stabes Energie und Impuls austauschen kann, ‚wissen', was die richtigen, den ganzen Stab berücksichtigenden Energie- bzw. Impulsbeträge wären? Und angenommen, daß es einen aus den Massen und Geschwindigkeiten von Stab und Körper berechenbaren Energiebetrag gäbe, dann wäre es doch bei hinreichender Stablänge möglich, am rechten Stabende ein Stück abzutrennen, *bevor* am linken der Stoß erfolgt, aber *nach* dem Zeitpunkt, in dem ein Signal hätte starten müssen, um das linke Ende noch vor dem Zusammenstoß dort zu erreichen. Der stoßende Körper hätte also auf einen Teil des Stabes eine Energiemenge übertragen, die für den ganzen Stab wohl ‚richtig' gewesen wäre; das bedeutet aber, daß sie für einen Teil des Stabes (wegen der veränderten Masse) ‚falsch' sein müßte.

3. Einfache abgeschlossene Systeme

Nach den Bemerkungen über die Zusammenstöße freier Teilchen mit ausgedehnten Körpern soll nun die Bewegung von Teilchen in einem begrenzten Volumen betrachtet werden. Bei solchen Bewegungsabläufen existieren Umkehrpunkte, die infolge der Relativität der Gleichzeitigkeit von den Teilchen u.U. zu ‚falschen' Zeitpunkten erreicht werden – je nach Bewegungszustand des Beobachters.
Um das zu demonstrieren, wird in den folgenden Beispielen neben dem Schwerpunktsystem S ein zweites, parallelachsiges Koordinatensystem S' benutzt, das sich wie üblich mit der konstanten Geschwindigkeit v in Richtung der positiven x-Achse bewegt, und dessen Ursprung mit dem des Systems S zur Zeit $t = t' = 0$ zusammenfalle. Es gelten also die Transformationsformeln:

$$x' = k(v)\,[x - vt]\,;\; y' = y\,;\; z' = z$$

$$t' = k(v)\,[t - (v/c^2)\,x]$$

$$\text{mit: } k(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

3.1. Kasten mit zwei Teilchen

In einem bezüglich seines Schwerpunktsystems S ruhenden Kasten führen zwei vollkommen elastische Kugeln gleicher Ruhemassen m_0 eine periodische Bewegung aus: Zur Zeit $t = 0$ fliegen sie gerade bei $x = 0$ mit den betragsmäßig gleichen Geschwindigkeiten $u_r = u$ bzw. $u_l = -u$ (nach rechts bzw. links) auseinander. Zur Zeit $t = T/2$ werden sie an den Seitenwänden des Kastens bei $x_r = L/2$ bzw. $x_l = -L/2$ ohne Energieverlust reflektiert[1]. Zur Zeit $t = T$ befindet sich die Anordnung wieder im Ausgangszustand (s. Abb. 2).

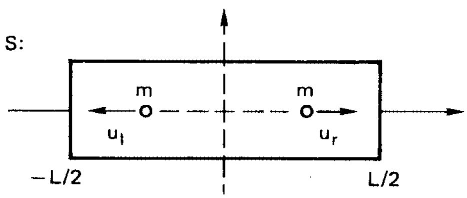

Abb. 2

Zu welchen Feststellungen, die Abläufe im Kasten betreffend, muß ein Beobachter gelangen, der sich im gegenüber S bewegten System S′ befindet? – Gemäß der Relativität der Gleichzeitigkeit finden die Stöße an den Seitenwänden des Kastens für einen solchen Beobachter zu *verschiedenen* Zeitpunkten statt. Aus der Lorentz-Transformation ergibt sich, daß von S′ aus beurteilt, beide Kugeln immer wieder, und zwar für Zeitspannen von jeweils $\Delta t'_\nu = (v/c^2)\,k(v)\,L$, mit der Geschwindigkeit

$$u'_l = -\frac{u+v}{1+uv/c^2}$$

in die gleiche Richtung fliegen, nämlich nach links. Jede Reflexion an der rechten Kastenwand erfolgt um die angegebene Zeitspanne $\Delta t'_\nu$ früher als die entsprechende Reflexion links.

Fragt man nun nach Gesamt-Energie E und Gesamt-Impuls p der ganzen Anordnung, so ergibt sich im System S (M_0 ist die Ruhemasse des Kastens ohne Kugeln):

$$E = M_0c^2 + 2\,mc^2$$

$$p = 0$$

$$\text{mit: } m = k(u)\,m_0 := \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

1 Im Unterschied zu dem in Abschn. 2 diskutierten Beispiel handelt es sich hier um einen stationären Bewegungsablauf, der in dieser Form allerdings erst nach einer gewissen Einspielphase möglich sein kann.

Von S' aus betrachtet, ergibt sich während der oben erwähnten Zeitspannen $\Delta t'_\nu$:

$$\begin{aligned} E' &= k(v)\, M_0 c^2 + 2\,k(u'_l)\, m_0 c^2 + \Delta E' \\ p' &= -k(v)\, M_0 v + 2\,k(u'_l)\, m_0 u'_l + \Delta p' \end{aligned} \qquad (1)$$

Hier stehen die Zusätze $\Delta E'$ und $\Delta p'$, weil der Kasten bei der Reflexion an der rechten Wand Energie und Impuls auf die entsprechende Kugel übertragen hat. Die Beträge $\Delta E'$ und $\Delta p'$ werden dann, bei der ‚verspäteten' Reflexion links, durch Energie- und Impulsaustausch mit der anderen Kugel kompensiert (und infolgedessen sind während der darauffolgenden Zeit, d.h. bis zur nächsten Reflexion an der rechten Wand, $\Delta E' = 0$ und $\Delta p' = 0$).

Da es sich aber um ein abgeschlossenes System handelt, ergeben sich Gesamt-Energie E' und Gesamt-Impuls p' andererseits aus E und p wie bei einem in S ruhenden Massenpunkt. In unserem Fall muß also auch gelten:

$$\begin{aligned} E' &= k(v)\, E \\ p' &= -k(v)\,(E/c^2)\, v \end{aligned} \qquad (2)$$

(E/c^2) ist die Ruhemasse des Gesamtsystems, nicht zu verwechseln mit der Ruhemasse M_0, die dem Kasten allein zukommt.

Der Vergleich von (1) mit (2) zeigt, daß gilt:

$$\begin{aligned} \Delta E' &= -2\,k(v)\, p_k\, v \\ \Delta p' &= 2\,k(v)\, p_k \end{aligned} \qquad (3)$$

p_k steht für den Impulsbetrag jeder der beiden Kugeln im System S, d.h.:

$$p_k = k(u)\, m_0 u$$

Aus (3) ergibt sich für $\Delta E'$ und $\Delta p'$ der invariante Ausdruck:

$$(\Delta E')^2 - c^2 (\Delta p')^2 = -4\, c^2 p_k^2 \qquad (4)$$

Von S' aus betrachtet werden also während der Zeitspanne $\Delta t'_\nu$ durch die Kastenwände Energie und Impuls transportiert. Denkt man sich diesen Transport als Bewegung eines Teilchens der Energie $\Delta E'$ mit dem Impuls $\Delta p'$, so ergibt sich aus der für alle Teilchen gültigen Beziehung zwischen Impuls und Energie die Geschwindigkeit v^* dieses ‚Teilchens' zu:

$$v^* = \frac{\Delta p'}{\Delta E'/c^2} = -\frac{c^2}{v}\,.$$

Daß sich der Energiebetrag $\Delta E'$ mit dieser Überlichtgeschwindigkeit v^* während der Zeitspanne $\Delta t'_\nu$ nach links durch den Kasten zu bewegen hätte, folgt — den Kasten als starr vorausgesetzt — auch aus der Bedingung, daß sich der Schwerpunkt der gesamten Anordnung mit der *konstanten* Geschwindigkeit $-v$ nach links bewegen muß. Mit anderen Worten: Während der Zeitspannen $\Delta t'_\nu$ existiert scheinbar ein ‚Teilchen', bei dem es sich um ein Tachyon handeln müßte, das an der linken Kastenwand genau zu dem Zeitpunkt aufträfe, in welchem dort die ‚verspätete' Kugel reflektiert wird; das Tachyon würde dabei absorbiert.

Gleichung (4) ließe sich dementsprechend deuten als die Beziehung zwischen Energie und Impuls eines Teilchens mit der imaginären Ruhemasse m_0^*:

$$m_0^* = -2\, ip_k/c$$

Damit wäre nun also die Existenz jener von Feinberg und anderen [3] seinerzeit diskutierten (sogar der experimentelle Nachweis wurde versucht) ‚Tachyonen' sichergestellt – unter der einzigen Voraussetzung, daß der Kasten keine inneren Freiheitsgrade hat und sich dementsprechend ‚starr' verhält. Selbstverständlich aber kann eine Voraussetzung nicht richtig sein, wenn sie solche Konsequenzen hat.
Die hier angestellten Überlegungen sollten genügen, um aufzuzeigen, daß das Problem der periodischen Bewegung zweier Teilchen in einem Kasten vom Standpunkt der Relativitätstheorie nur dadurch befriedigend gelöst werden kann, daß man den Kasten von Anfang an als deformierbares Kontinuum behandelt. Vorausgesetzt, daß es eine periodische Bewegung von Teilchen in einem solchen Kasten überhaupt gibt, dann jedenfalls erst nach einer gewissen Einspielphase, in deren Verlauf der Kasten einen Teil der kinetischen Energie aufnimmt und speichert (z.B. durch Ausbildung einer stehenden Welle).
Obwohl man nicht weiß, was bei den ersten Stößen im einzelnen geschieht, und obwohl es sich auch nicht ohne weiteres sagen läßt, welchen Bruchteil an kinetischer Energie der Kasten insgesamt aufnimmt, so kann man doch davon ausgehen, daß eine vollständig durchgeführte relativistische Mechanik imstande wäre, zu erklären, wie der Energietransport durch die Kastenwände je nach Beobachter entweder von rechts nach links, oder – bei demselben Prozeß, diesmal aber bezüglich eines Systems S'', das sich mit der Geschwindigkeit $-v$ entlang der negativen x-Achse gegen S bewegt – von links nach rechts stattfinden kann; und zwar *ohne auf so seltsame Gebilde wie ‚Tachyonen' angewiesen zu sein*. Mehr noch, man darf verlangen, daß es im Rahmen der Relativitätstheorie möglich sein muß, zu beschreiben, was geschieht, wenn die linke Kastenwand während einer der Zeitspannen $\Delta t'_\nu$ geöffnet wird. Das hätte zur Folge, daß beide Kugeln den Kasten nach links mit der gleichen Geschwindigkeit u'_l verlassen.
Selbst wenn man das Kastenmaterial von vorneherein als deformierbares Medium in Rechnung stellt, dann bleibt im Unterschied zur vorrelativistischen Behandlung beispielsweise noch festzuhalten, daß sich (bei periodischer Bewegung der beiden Kugeln) der Schwerpunkt des Kastens allein, obwohl bezüglich S jederzeit ruhend, i.a. *nicht* mit konstanter Geschwindigkeit durch S' bewegen kann.

3.2. Zur Frage des Schwerpunkts

Um zu zeigen, daß jeder naiven Auffassung der Relativitätstheorie als einer ‚erweiterten Newton-Mechanik' bei anderen Abläufen ähnliche Probleme entgegenstehen, betrachte man wieder einen Kasten, diesmal aber mit nur einer Kugel (s. Abb. 3). Der Einfachheit halber werde vorausgesetzt, daß Kasten und Kugel gleiche Ruhemassen haben, d.h. sie haben zu jedem Zeitpunkt eintgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten im gemeinsamen Schwerpunktsystem S.

Abb. 3

Die Geschwindigkeiten seien diesmal +v bzw. −v. Die Kugel wird abwechselnd an rechter und linker Kastenwand reflektiert. Den Gesetzen der klassischen Mechanik zufolge werden dabei die Impulse ausgetauscht. Die kinetische Energie von Kasten bzw. Kugel ändert sich nicht.

Betrachtet man diesen Vorgang nun aus der Sicht eines in S' ruhenden Beobachters, so befindet sich der Kasten während der oben skizzierten Phase in Ruhe, wohingegen die Kugel gerade mit der Geschwindigkeit

$$v' = -\frac{2v}{1+v^2/c^2}$$

nach links fliegt. Nach dem Zusammenstoß befindet sich dann die Kugel in Ruhe, während sich der Kasten mit der Geschwindigkeit v' nach links bewegt. Nach dem darauffolgenden Stoß an der rechten Kastenwand befindet sich die Anordnung wieder im Ausgangszustand.

Da bedeutet aber, daß von S' aus betrachtet, während der Zeiten, in denen die Kugel ruht, ein Energietransport durch die Kastenwände stattfinden muß, und zwar nach rechts. Denn jeweils beim Zusammenstoß an der *rechten* Wand nimmt die Kugel vom Kasten die gesamte kinetische Energie (und auch den gesamten Impuls) auf. Und jeweils beim Zusammenstoß *links* gibt die Kugel den gesamten Betrag wieder an den Kasten zurück. Es scheint so, als ob — Lokalisierbarkeit der Energie vorausgesetzt — der Betrag der periodisch ausgetauschten kinetischen Energie während der Bewegung des Kastens immer auf Höhe der Kugel bleibt, indem sich dieser Betrag innerhalb des Kastens mit der Geschwindigkeit v (gemessen in S) wie die Kugel nach rechts verschiebt.

Wenn sich die Sache so verhielte, dann müßte aber — wie der Übergang zu dem dritten System S'' zeigt — auch während der Phasen, in deren Verlauf die Kugel bezüglich S' durch den ruhenden Kasten fliegt, in den Kastenwänden ein entsprechender Energietransport stattfinden. Im Schwerpunktsystem S schließlich müßte der Betrag der kinetischen Energie zwischen linker und rechter Kastenwand hin und her laufen, ohne daß ein Austausch stattfände. Bedenkt man aber, daß mit einem solchen Energietransport zwangsläufig ein periodisch wechselnder, *zusätzlicher* Impuls verbunden wäre, dann wird endgültig klar, daß es den hier besprochenen Bewegungsablauf in dieser Einfachheit gar nicht gibt.

3.3. Der relativistische Rotator

Auch bei dem folgenden Beispiel einer stationären Bewegung zweier Teilchen in einem abgeschlossenen System treten bemerkenswerte Fragen auf. Dabei handelt es sich diesmal um ein besonders einfaches System, in welchem Stoßprozesse keine Rolle spielen, und in welchem nach klassischer Vorstellung auch keine potentielle Energie enthalten ist:

Zwei aneinander gekoppelte Körper K_1 und K_2 drehen sich auf Kreisbahnen in der xy-Ebene des Schwerpunktsystems S mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Bei der Kopplung F handle es sich um einen Faden (oder um ein Feld), dessen Masse m_F inhomogen[1] verteilt sei, und zwar so, daß der Schwerpunkt des Fadens mit dem Schwerpunkt der gesamten Anordnung im System S jederzeit zusammenfalle[2].

1 Für den Fall, daß die beiden Körper gleiche Massen haben und sich dementsprechend in gleicher Entfernung vom Drehzentrum bewegen, kann man auch von einer homogenen Massenverteilung im Faden ausgehen. Fußnote 2 s.S. 30

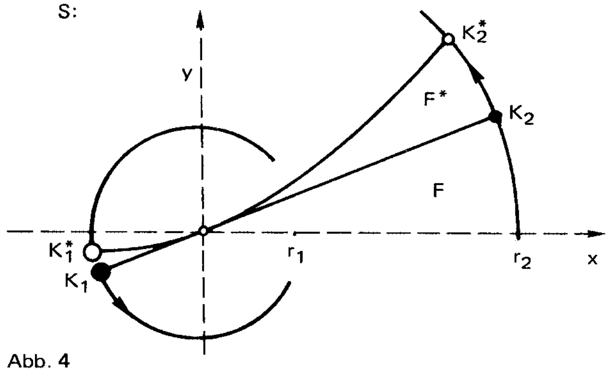

Abb. 4

K_1 und K_2 sind gleichzeitige Positionen im Schwerpunktsystem S; dagegen handelt es sich bei K_1^* und K_2^* (s. Abb. 4) um Positionen, die von den beiden Körpern zur selben Zeit t' eingenommen werden, d.h. ebenfalls gleichzeitig, diesmal aber bezüglich des gegenüber S bewegten Systems S'.

Die Ortskomponenten der beiden Körper K_1 und K_2 im Schwerpunktsystem S sind gegeben durch:

$$x_{1/2} = \mp r_{1/2} \cos \omega t$$
$$y_{1/2} = \mp r_{1/2} \sin \omega t$$

Dem entsprechen die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\dot{x}_{1/2} = \pm u_{1/2} \sin \omega t$$
$$\dot{y}_{1/2} = \mp u_{1/2} \cos \omega t$$

dabei steht $u_{1/2}$ für die Beträge der Umlaufgeschwindigkeiten beider Körper:

$$u_{1/2} = r_{1/2}\, \omega$$

Außerdem werden als Abkürzungen benutzt:

$$u := u_1 + u_2$$
$$d := r_1 + r_2 .$$

Weil es sich bei S um das Schwerpunktsystem handelt, und weil außerdem der Schwerpunkt des Fadens nach Voraussetzung mit dem Schwerpunkt der gesamten Anordnung zusammenfällt, muß gelten:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$
$$m_1 u_1 = m_2 u_2$$
$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| := p$$

Die Energiewerte der beiden Körper mit den Ruhemassen m_{01} und m_{02} sind im System S zeitlich konstant:

$$E_{1/2} = m_{1/2} c^2 = k(u_{1/2})\, m_{01/02}\, c^2$$

Die Impulskomponenten zur Zeit t lauten:

$$p_{x1/2} = \pm p \sin \omega t$$
$$p_{y1/2} = \mp p \cos \omega t$$

2 Diese Forderung bezieht sich ausdrücklich auf das System S (von einem anderen Inertialsystem aus beurteilt, können die Schwerpunkte des Fadens bzw. der gesamten Anordnung dann aber i.a. *nicht* jederzeit zusammenfallen).

Energie- und Impulswerte der beiden Körper bezüglich S' zu einer bestimmten Zeit t' lassen sich ermitteln, indem man zunächst die Energie- und Impulswerte im System S zu den *verschiedenen* Zeitpunkten t_1^* und t_2^* berechnet, die den bezüglich S' *gleichzeitigen* Positionen K_1^* bzw. K_2^* entsprechen; daraus ergeben sich dann durch Anwendung der bekannten Transformationsformeln die gesuchten Werte[4] zu:

$$\begin{aligned} E'_{1/2}(t') &= k(v)\,[E_{1/2} - v p_{x1/2}(t^*_{1/2})] \\ p'_{x1/2}(t') &= k(v)\,[p_{x1/2}(t^*_{1/2}) - \frac{v}{c^2} E_{1/2}] \\ p'_{y1/2}(t') &= \quad p_{y1/2}(t^*_{1/2}) \end{aligned} \tag{5}$$

Wie die Energiewerte E_1 und E_2 sind auch die Beträge der Impulse beider Körper, p_1 und p_2, nicht nur konstant bezüglich t, sondern auch konstant bezüglich t^*.
Dagegen lassen sich die Komponenten $p_{x1/2}(t^*_{1/2})$ und $p_{y1/2}(t^*_{1/2})$ nicht ohne weiteres explizit angeben, weil die Zeitpunkte t_1^* bzw. t_2^* durch die folgende transzendente Gleichung nur implizit gegeben sind (t_0 sei die Anzeige der Uhr im Koordinatenursprung von S):

$$t^*_{1/2} = t_0 \mp (v/c^2)\, r_{1/2} \cos \omega t^*_{1/2}$$

Diese Beziehung ergibt sich wegen der bezüglich S' geforderten Gleichzeitigkeit der Positionen K_1^* und K_2^* aus:

$$t' = k(v)\,[t^*_{1/2} - (v/c^2)\, x^*_{1/2}] \quad \text{und} \quad x^*_{1/2} = \mp r_{1/2} \cos \omega t^*_{1/2}$$

Setzt man

$$t^*_{1/2} = t_0 + \tau_{1/2} \quad \text{mit} \quad \tau_{1/2} = \mp (v/c^2)\, r_{1/2} \cos \omega (t_0 + \tau_{1/2})$$

so gibt $\tau_{1/2}$ die zeitlichen Verschiebungen gegenüber t_0 an, die notwendig sind, damit die Positionen K_1^* und K_2^* bezüglich des Systems S' von den beiden umlaufenden Körpern gleichzeitig eingenommen werden, nämlich zum Zeitpunkt $t' = t_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.
Für die praktische Rechnung läßt sich obige Beziehung näherungsweise als Rekursionsformel schreiben,

$$(\tau_{1/2})_{\nu+1} = \mp (v/c^2)\, r_{1/2} \cos \omega\, [t_0 + (\tau_{1/2})_\nu]$$

in die man mit dem Startwert

$$(\tau_{1/2})_1 = \mp (v/c^2)\, r_{1/2} \cos \omega t_0$$

hineinzugehen hätte. Solange aber gilt $uv/c^2 \ll 1$, genügt die erste Näherung, also:

$$t^*_{1/2} \approx t_0 \mp (v/c^2)\, r_{1/2} \cos \omega t_0$$

In dieser Näherung ergibt sich dann:

$$\cos \omega t^*_{1/2} \approx \cos \omega t_0 \pm \frac{u_{1/2} v}{c^2} \cos \omega t_0 \sin \omega t_0 - \frac{1}{2} \frac{u^2_{1/2} v^2}{c^4} \cos^3 \omega t_0$$

$$\sin \omega t^*_{1/2} \approx \sin \omega t_0 \mp \frac{u_{1/2} v}{c^2} \cos^2 \omega t_0 - \frac{1}{2} \frac{u^2_{1/2} v^2}{c^4} \sin \omega t_0 \cos^2 \omega t_0$$

Für die gesuchten Impulskomponenten von K_1^* und K_2^* erhält man demzufolge

$$p_{x1/2}(t^*_{1/2}) \approx \pm p \left[\sin \omega t_0 \mp \frac{u_{1/2} v}{c^2} \cos^2 \omega t_0 - \frac{1}{2} \frac{u^2_{1/2} v^2}{c^4} \sin \omega t_0 \cos^2 \omega t_0 \right]$$

$$p_{y1/2}(t^*_{1/2}) \approx \mp p \left[\cos \omega t_0 \pm \frac{u_{1/2} v}{c^2} \sin \omega t_0 \cos \omega t_0 - \frac{1}{2} \frac{u^2_{1/2} v^2}{c^4} \cos^3 \omega t_0 \right]$$

Bildet man die Summen E^*, p_x^*, p_y^* von Energiewerten bzw. Impulskomponenten beider Körper, so ergeben sich diese zu:

$$E^* = E_1(t_1^*) + E_2(t_2^*) = E_1 + E_2 = (m_1+m_2)\,c^2$$

$$p_x^* = p_{x1}(t_1^*) + p_{x2}(t_2^*) \approx -\frac{uv}{c^2}\,p\cos^2\omega t_0$$

$$p_y^* = p_{y1}(t_1^*) + p_{y2}(t_2^*) \approx -\frac{uv}{c^2}\,p\sin\omega t_0\cos\omega t_0$$

Da sich Energie und Impuls des gesamten abgeschlossenen Systems *Rotator* beim Übergang nach S' gerade so transformieren wie Energie und Impuls eines in S ruhenden Teilchens, so ist man gezwungen, dem ‚Faden' F^*, der für das System S rekonstruiert ist aus Bestandteilen von F in denjenigen Positionen, die bezüglich S' gleichzeitig eingenommen werden (s. Abb. 4), bei zeitlich konstanter ‚Energie' $E_F^* = E_F = m_F c^2$ einen zeitlich veränderlichen ‚Impuls' $\vec{p}_F^*$ zuzuschreiben:

$$p_{Fx}^* = -p_x^* \approx \frac{uv}{c^2}\,p\cos^2\omega t_0$$

$$p_{Fy}^* = -p_y^* \approx \frac{uv}{c^2}\,p\sin\omega t_0\cos\omega t_0$$

Mit diesen Hilfsgrößen erhält man für die Energie E_F' und den Impuls $\vec{p}_F'$ des Fadens im System S' zur Zeit t' wegen $t' = t_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ mit der Abkürzung $\omega' := \omega\sqrt{1-v^2/c^2}$:

$$\begin{aligned} E_F' &= k(v)\,[E_F - v p_{Fx}^*] \\ &\approx k(v)\,[E_F - \frac{v^2}{c^2}\,up\cos^2\omega' t'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{Fx}' &= k(v)\,[p_{Fx}^* - \frac{v}{c^2}\,E_F] \\ &\approx k(v)\left[\frac{v}{c^2}\,up\cos^2\omega' t' - \frac{v}{c^2}\,E_F\right] \end{aligned}$$

$$p_{Fy}' = p_{Fy}^* \approx \frac{v}{c^2}\,up\sin\omega' t'\cos\omega' t'$$

Denkt man sich die beiden rotierenden Körper zu irgendeinem Zeitpunkt t' im System S' von dem Faden abgekoppelt (im System S bedeutet dies, daß die beiden Körper z.B. in den Positionen K_1^* und K_2^* abgeschnitten werden), und schließt man aus der Energie $E_F'(t')$ und dem Impuls $\vec{p}_F'(t')$ in bekannter Weise auf die Ruhemasse[1] m_{F0}', so zeigt es sich, daß dem nunmehr sich selbst überlassenen Faden eine Ruhemasse zukommt, die ganz davon abhängt, zu welchem Zeitpunkt t' das Abkoppeln erfolgte. Bis zu diesem Zeitpunkt aber ist die Ruhemasse des Fadens zeitlich veränderlich, und zwar gilt:

1 Siehe Kommentar.

$$m'_{F0}(t') = \frac{1}{c^2}\left\{E'^2_F(t') - c^2[p'^2_{Fx}(t') + p'^2_{Fy}(t')]\right\}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{c^2}\left\{E^2_F - c^2\,[p^{*2}_{Fx} + p^{*2}_{Fy}]\right\}^{1/2}$$

$$\approx \left\{m^2_F - \frac{v^2u^2}{c^4}\frac{p^2}{c^2}\cos^2\omega' t'\right\}^{1/2}$$

Da das Produkt up näherungsweise mit der doppelten kinetischen Energie der beiden umlaufenden Körper übereinstimmt $(m_1u_1 = m_2u_2 = p)$,

$$up = u_1p + u_2p = m_1u_1^2 + m_2u_2^2$$
$$\approx 2E_{kin}$$

und weil sich in gleicher Näherung auch die Wurzel ziehen läßt, erhält man die periodische Zeitabhängigkeit der Ruhemasse des Rotatorfadens m'_{F0} endgültig in der Form:

$$m'_{F0}(t') \approx m_F\left\{1 - 2\frac{v^2}{c^2}\frac{E^2_{kin}}{E^2_F}\cos^2\omega' t'\right\} \qquad (6)$$

Dieses Ergebnis ist in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert:

1. Die dem Faden zuzuschreibende Ruhemasse, und damit (Unveränderlichkeit der Ruhemassen m_{01} und m_{02} beider Körper vorausgesetzt) die insgesamt im System *Rotator* enthaltene Ruhemasse, ist *nicht* von jedem Inertialsystem aus beurteilt zeitlich konstant, sondern nur bezüglich jener speziellen Systeme, in denen der Schwerpunkt des Rotators ruht.

2. Die mittlere Ruhemasse $\overline{m'_{F0}}$ ist *nicht* invariant gegen Lorentz-Transformation:

$$\overline{m'_{F0}} = m_F\left\{1 - \frac{v^2}{c^2}\frac{E^2_{kin}}{E^2_F}\right\}$$

3. Im Schwerpunktsystem S ist zwar die Ruhemasse des Fadens, solange dieser an der Rotation teilnimmt, zeitlich konstant, aber: Schneidet man den Körper K_1 zu irgendeinem Zeitpunkt t_1 ab, so wird der Körper K_2 darauf frühestens dann reagieren, wenn ein zum Zeitpunkt t_1 von K_1 ausgehendes Lichtsignal den Körper K_2 erreicht haben könnte. Und das bedeutet, daß (für eine gewisse Zeit nach dem Abkoppeln des Körpers K_1) vom Körper K_2, der ja zunächst einmal ungestört in seiner Umlaufbewegung fortfährt, auf den Faden Impuls übertragen wird, ohne daß sich aber der auf den Faden entfallende Energieanteil ändert. Dies ist nur möglich, wenn sich die Ruhemasse des Fadens während der erwähnten Zeitspanne genau so verändert, daß gilt:

$$m_F = \frac{E_F}{c^2} = [m^2_{F0}(t) + p^2_F(t)/c^2]^{1/2} = \text{konst}\big|_t$$

Wird nun auch noch der Körper K_2 abgeschnitten, zu einem solchen Zeitpunkt t_2, daß ‚Abschneiden von K_1' und ‚Abschneiden von K_2' zwei raumartige Ereignisse sind, so muß aufgrund des Impulserhaltungssatzes der Faden, indem er sich selbst überlassen wird, eine Beschleunigung erfahren, die zur Folge hat, daß er schließlich mit einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit u_F aus dem Koordinatenursprung von S davonfliegt. Und weil die gesamte Energie des davonfliegenden Fadens mit der Energie übereinstimmt, die schon vorher auf den Faden entfiel, als dessen Schwerpunkt noch in S ruhte, kann der Zuwachs an kinetischer Energie nur auf Kosten der Ruhemasse zustandegekommen sein. Es scheint also möglich, dem System *Rotator* durch geeignete Schnitte mehr Energie zu entziehen, als in Form kinetischer Energie urpsrünglich enthalten ist.

Man mag einwenden, daß hier die Masse des Fadens, solange sein Schwerpunkt ruht, als Ruhemasse in Rechnung gestellt wird, obwohl doch der rotierende Faden bereits kinetische Energie enthält. Zwar befindet sich der Faden insgesamt zunächst in Ruhe, nicht aber seine Teile. Wäre es denn nicht möglich, daß die ‚echte Ruhemasse' des Fadens beim Abtrennen der beiden Körper die gleiche bleibt, und lediglich die Umwandlung eines Teils der vorher gespeicherten *inneren* kinetischen Energie (bei Schwerpunktgeschwindigkeit Null) in *äußere* kinetische Energie (bei Schwerpunktgeschwindigkeit u_F) erfolgt? – Diese Frage ist zu verneinen.

Denkt man sich nämlich im System S irgendein Volumenelement des an der Rotation teilnehmenden Fadens herausgegriffen, so ist im Hinblick auf den Drehimpulserhaltungssatz leicht einzusehen, daß der Beitrag eines solchen Elements zur inneren kinetischen Energie nur unter der Voraussetzung abnehmen kann, daß (bei gleichbleibendem Beitrag zum Drehimpuls) seine Entfernung vom Drehzentrum *zunimmt*. Es wäre aber wohl kaum zu verstehen, wie auch nur ein Bestandteil des Fadens, dadurch daß man die beiden Körper K_1 und K_2 abtrennt, in eine größere Entfernung zum Drehzentrum geraten sollte.

Nach allgemeiner Auffassung gilt für die in abgeschlossenen stationären Systemen enthaltene Ruhemasse[1] ein Erhaltungssatz[2], der in differentieller Form geschrieben, auch als ‚Kontinuitätsgleichung der Materie' bezeichnet wird [4]:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\mu_0 u^k) = 0 . \tag{7}$$

Hierin steht μ_0 für die Ruhmassendichte; u^k sind die kontravarianten Komponenten der Vierer-Geschwindigkeit.

Entweder ist die Kontinuitätsgleichung der Materie auf ein abgeschlossenes System wie den *Rotator* entgegen der üblichen Auffassung nicht anwendbar, oder die beiden umlaufenden Körper K_1 und K_2 lassen sich, was Berechnung bzw. Transformation von Energie und Impuls angeht, nicht so behandeln, wie es bei *freien* Teilchen richtig wäre (s. Gl. 5). Das aber muß bedeuten, daß aufgrund der Relativitätstheorie die Bestandteile eines abgeschlossenen Systems, wie z.B. die Körper K_1 und K_2, nicht mehr uneingeschränkt als Teilchen beschreibbar (oder auch nur denkbar) sind.

3.4. Weitere Beispiele

Außer den oben diskutierten, einfachen Beispielen gibt es noch andere, bei denen im Zusammenhang mit der Relativität der Gleichzeitigkeit ganz entsprechende Fragen auftreten, wie sie im Rahmen einer ‚erweiterten klassischen Mechanik' eben nicht zu beantworten sind; jedenfalls nicht, ohne *zumindest einen* der jeweils beteiligten Körper als *Kontinuum* zu behandeln, in welchem jene, von Einstein so genannten ‚Zustandsänderungen unbekannter Qualität' stattfinden müssen.

1 Siehe aber die Anmerkungen am Ende dieses Abschnitts.
2 Siehe Kommentar.

Man überlege sich beispielsweise, was geschieht, wenn ein auf zwei Rollen reibungsfrei laufendes Band (s. Abb. 5a) oder eine entsprechende Kette (s. Abb. 5b) bei $x = -d$ bzw. $x = +d$ im System S zu verschiedenen, raumartig liegenden Zeitpunkten durchgeschnitten werden.

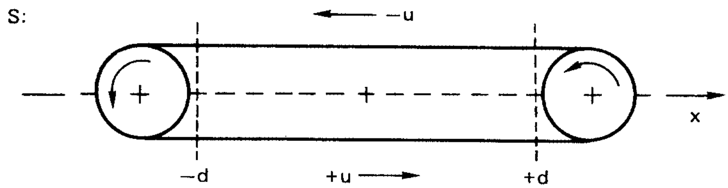

Abb. 5a

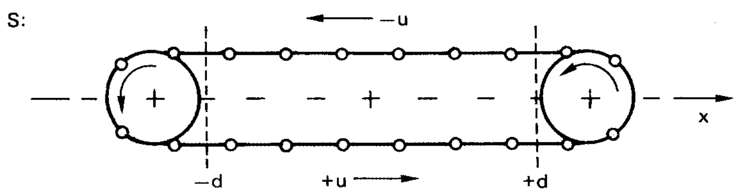

Abb. 5b

Wieviel Energie, Impuls und Ruhemasse entfällt auf die einzelnen, durch die zwei Schnitte entstehenden Bandanteile? Mit welchen Geschwindigkeiten fliegen sie davon?
Oder man frage nach der Verteilung von Energie und Impuls in der Feder eines Oszillators (s. Abb. 6) während der Zeitspanne, die vergeht, vom Abschneiden eines der beiden schwingenden Körper bis zu dem Augenblick, in welchem der andere frühestens (durch Änderung seines Bewegungsablaufs) auf den Schnitt reagieren kann.

Abb. 6

Ganz und gar unverständlich erscheint schließlich das Problem eines in sich rotierenden Ringes (bzw. einer rotierenden Kreisscheibe bzw. einer rotierenden Kugel). Denkt man sich nämlich bei dem in der xy-Ebene um den Koordinatenursprung rotierenden Ring (s. Abb. 7) zwei Volumenelemente herausgegriffen, die im System S jederzeit einander gegenüberliegen, so wären die im Zusammenhang mit dem Rotator angestellten Überlegungen auf die beiden Volumenelemente übertragbar, mit dem entscheidenden Unterschied, daß es hier keinen Faden gibt, der die beim Übergang nach S′ in der Energie-Impuls-Bilanz auftretenden Differenzen durch Änderung seiner Ruhemasse ausgleichen könnte. Das Fehlen eines Fadens macht die Angelegenheit allerdings äußerst bedenklich. Offenbar ist es notwendig, die in einem rotierenden Ring zwangsläufig auftretenden Spannungen als Träger von Energie und Impuls in Rechnung zu stellen.

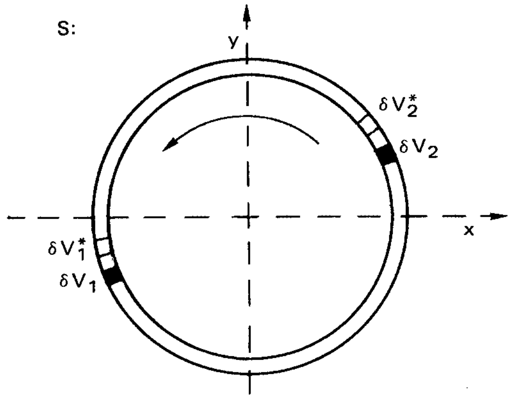

Abb. 7 δV_1 und δV_2 sind die den Körpern K_1 und K_2 (s. Abb. 4) entsprechenden Volumenelemente (diejenigen Positionen dieser beiden Elemente im System S, die bzüglich eines Systems S' gleichzeitig erscheinen, sind wieder durch * gekennzeichnet).

4. Die Beschreibung abgeschlossener Systeme mit Hilfe des Energie-Impuls-Tensors

Wie Max v. Laue schon 1911 betonte [4], ergibt sich aus der Nicht-Existenz starrer Körper die Notwendigkeit, die Dynamik des Massenpunkts aus einer Kontinuumsmechanik durch Grenzübergang abzuleiten. Anstelle der Energie- und Impulswerte irgendwelcher Teilchen werden entsprechende Dichten eingeführt. Wenn man verlangt, daß für diese vier Dichten Kontinuitätsgleichungen gelten sollen, dann erweisen sich diese Dichten als Komponenten eines Tensors T^{ik}, und die vier Kontinuitätsgleichungen lauten [5]:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0 \qquad (8)$$

Die Gültigkeit dieser Gleichungen und die Erfüllung gewisser Standardbedingungen (neben Stetigkeit und Differenzierbarkeit der T^{ik} auch ihr Verschwinden außerhalb des abgeschlossenen Systems) vorausgesetzt, läßt sich bekanntlich das Laue-Theorem beweisen: Die im Schwerpunktsystem gebildeten Raum-Integrale über die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors T^{ik} sind alle gleich null, außer dem Integral über T^{00}, das die gesamte im System enthaltene Energie ergibt. Darüberhinaus folgt aus (8), daß sich Energie und Impuls so transformieren wie bei einem Teilchen: Energie und Impuls eines abgeschlossenen Systems bilden einen zeitlich konstanten 4-Vektor.

Will man also die hier zur Diskussion gestellten Bewegungsabläufe im Sinne einer relativistischen Mechanik beschreiben, so sieht man sich gezwungen, für das jeweils ins Auge gefaßte System die Energie- und Impulsdichten T^{ik} einzuführen, und zwar in Form ‚kontinuierlicher Raumfunktionen', wie Einstein betont, wenn er schreibt: „Es gibt keine Gleichzeitigkeit distanter Ereignisse; es gibt also auch keine unvermittelte Fernwirkung im Sinne der Newtonschen Mechanik. Die Einführung von Fernwirkungen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, bleibt zwar . . . denkbar, erscheint aber unnatürlich; in einer derartigen Theorie könnte es nämlich keinen vernünftigen Ausdruck für das Energieprinzip geben. Es erscheint deshalb unvermeidlich, daß die physikalische Realität durch

kontinuierliche Raumfunktionen zu beschreiben ist. Der materielle Punkt dürfte deshalb als Grundbegriff der Theorie nicht mehr in Betracht kommen." [6, S. 23].
Doch obwohl darin die *prinzipielle* Lösung aller aufgetretenen Probleme zu liegen scheint, bleibt an dieser Stelle festzuhalten, daß selbst so ‚einfache' Modelle wie *Teilchen in begrenztem Volumen, Rotator, Oszillator* im Rahmen der Relativitätstheorie bis heute nicht im Detail gelöst sind.

5. Abschließende Bemerkung

Es fällt auf, daß es sich hierbei gerade um diejenigen abgeschlossenen Systeme handelt, die als *Prototypen* der Quantenmechanik in die Geschichte der Physik eingegangen sind. Und nun stellt sich allerdings die Frage, ob denn die Existenz von *Teilchen* überhaupt vereinbar sein kann mit einem Energie-Impuls-Tensor, dessen Komponenten T^{ik} *kontinuierliche* Funktionen der vier Raum-Zeit-Koordinaten sind, wenn nicht im Sinne der *Quantentheorie*, von deren Begründern Einstein schreibt: „Vor allem aber glauben sie, daß der anscheinend sprunghafte Charakter der Elementarvorgänge nur durch eine im Wesen statistische Theorie dargestellt werden kann, in welcher den sprunghaften Änderungen der Systeme durch *kontinuierliche* Änderungen von Wahrscheinlichkeiten der möglichen Zustände Rechnung getragen wird." [6, S. 33]
Stellt es sich vielleicht am Ende heraus, daß nur ein im Sinne der *Quantenmechanik* eingeschränkter Teilchenbegriff geeignet ist, den Anforderungen der *Relativitätstheorie* Rechnung zu tragen?
Aufgabe dieses Artikels war es, darauf hinzuweisen, daß die Relativitätstheorie jedenfalls mehr ist als bloß der ‚Abschluß einer Entwicklung'.
Für die kritische Durchsicht des Manuskripts und eine Reihe wertvoller Diskussionen möchte ich Herrn Prof. Dr. Jürgen Ehlers an dieser Stelle sehr herzlich danken.

(Anschrift des Verfassers: Dipl. phys. Peter Ostermann, Karlsgymnasium, Am Stadtpark 21, 8000 München 60)

Eingangsdatum: 21.2.1983
veränderte Fassung: 29.10.1983

Literatur

[1] Born, M.: Physik im Wandel meiner Zeit. Braunschweig: Vieweg 1957

[2] Einstein, A.: Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie. In: Ann. d. Ph. 23 (1907), S. 371ff.

[3] Bilaniuk, O.M., Deshpande, V.K., Sudarshan, E.C.G.: „Meta" Relativity. In: Amer. J. Phys. 30 (1962), S. 718ff.
Feinberg, G.: Possibility of Faster-Than-Light. Particles. In: Phys. Rev. 159 (1967), S. 1089ff.
Feinberg, G.: Particles That Go Faster than Light. In: Sci. Amer. 222 (1970), S. 68ff.

[4] v. Laue, M.: Zur Dynamik der Relativitätstheorie. In: Ann. d. Ph. 35 (1911), S. 524ff.

[5] Planck, M.: Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik. In: Verh. d. Dt. Phys. Ges. 18/20 (1908), S. 728ff.

[6] Einstein, A.: Autobiographisches. In: Schilpp, P.A. (Hrsg.): Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher. Braunschweig: Vieweg 1979