

# **Das Variationsprinzip einer einheitlichen Theorie von Elektrodynamik, Gravitation und Quantenmechanik**

*Peter Ostermann*

Die Grundgleichungen einer einheitlichen Skalar-Vektor-Tensor-Theorie von Elektrodynamik, Gravitation und Quantenmechanik werden aus einem konsistenten Wirkungsprinzip abgeleitet.

Aus der *vollständigen* Variation fließen dabei: a) die Maxwell'schen Gleichungen in quantisierter Form; b) die Lorentz-Kraft als reine Wechselwirkung verschiedener Teilchen; c) der physikalische Zusammenhang zwischen Viererstromdichte und Viererpotential; d) die Einsteinschen Gravitationsgleichungen; e) der zugehörige Energie-Impuls-Tensor der atomaren Materie; f) die Klein-Gordon-Gleichung für spinfreie Teilchen; g) die Energie-Frequenz-Beziehung für Photonen bei Übergängen im elektrischen Feld.

Als wohlbegründete Näherungen außerdem: h) die konventionelle Lorentz'sche Elektrodynamik mit der Hamilton-Jacobi-Gleichung für geladene Teilchen; i) der herkömmliche Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes; j) die klassische Mechanik samt den Idealisierungen von Massenpunkt und potentieller Energie; k) der phänomenologische Energie-Impuls-Tensor der allgemeinen Relativitätstheorie; l) Einsteins Bewegungsgleichungen im Gravitationsfeld; m) die fundamentale Schrödinger-Gleichung mit den Ehrenfest'schen Sätzen; n) die Vielteilchen-Wellengleichung im Konfigurationsraum.

Die neue *deduktive* Quantenmechanik steht einschließlich der Unschärferelationen im Einklang mit bewährten Prinzipien der relativistischen Physik – allerdings nicht mehr als Punktmechanik, sondern als Theorie *ausgedehnter* Teilchen *veränderlicher* Gestalt.

<[box@peter-ostermann.de](mailto:box@peter-ostermann.de)>

*You will find some more necessary aspects – as well as useful references and the detailed notation, too – in the underlying e-print*  
[\*] *"Skizze einer offenen Theorie von Elektrodynamik, Gravitation, Quantenmechanik" (2006) peter-ostermann/060915*  
*(Principles and aspects of an open theory of electrodynamics, gravitation, quantum mechanics), 115 pages, in German, 2 tables, 10 figures;*  
*a download is available from on my website (s. header line above).*

*In all cases of doubt which seem almost unavoidable because of the limited space and time of this talk,*  
*please use the e-print just mentioned as the valid expression of my approach.*

## Notation

Abgesehen von der wohlbekannten Landau-Lifschitz Notation – wo insbesondere gilt  $i, k, l \dots = 0, 1, 2, 3$  und  $\alpha, \beta \dots = 1, 2, 3$  – oder zusätzlichen selbsterklärenden Abkürzungen und Naturkonstanten wie  $e, c, \hbar, \kappa \equiv 8\pi\gamma/c^4$ , mögen hier lediglich einige ausgewählte Symbole explizit aufgelistet werden. Die detaillierte Notation (sowie eine wesentlich ausführlichere Begründung, Darstellung und Diskussion des gesamten Konzepts) findet sich in "Skizze einer offenen Theorie von Elektrodynamik, Gravitation, Quantenmechanik" (115 Seiten, 2 Tafeln, 10 Abbildungen).

Die durch kursive Großschreibung wie in  $A_i$  oder bei der Vierergeschwindigkeit  $U^i$  gekennzeichneten Symbole bezeichnen makroskopisch bzw. statistisch geglättete Größen (im Unterschied zu ihren kleingeschriebenen mikroskopischen Gegenstücken wie in  $a_i^{\bar{K}}$  oder  $u_K^i$ ).

$S, s$  – der Wirkungsskalar, wobei z. B.  $s_i \equiv \partial_i S \equiv \partial S / \partial x^i$ , das Symbol  $\Phi$  steht für die Wirkungsdichte

$Q, q$  – die Gestaltsfunktion (bzw. der Formskalar), wobei  $q_l \equiv \partial_l q \equiv \partial q / \partial x^l$

$A_i, a_i$  – die elektromagnetischen Potentiale, wobei  $A_{ik} \equiv \partial_i A_k \equiv \partial A_k / \partial x^i$

$J^k, j^k$  – die elektromagnetische Stromdichte, z. B.  $j^k \equiv (\rho, \frac{1}{c}\vec{j})$

$F_{ik}, f_{ik}$  – die elektromagnetischen Feldstärken

$g_{ik}$  – der Fundamentaltensor mit der Signatur (+ ---), wobei z. B.  $g_{lik} \equiv \partial_l g_{ik} \equiv \partial g_{ik} / \partial x^l$

$\sqrt{g}$  – die Wurzel der negativen Determinante  $g$ , wobei gelten soll  $X_{\dots} \equiv \sqrt{g} X_{\dots}$  wie z. B.  $\Phi \equiv \sqrt{g} \Phi$  oder  $\mathbf{j}^k \equiv \sqrt{g} j^k$

$E_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$  sind die kovarianten Komponenten des Einstein-Tensors (wobei  $R_{ik}$  für den Ricci-Tensor steht und  $R$  für dessen Spur)

$T_{ik}, \tau_{ik}$  – die kovarianten Komponenten des Energie-Impuls-Spannungs-Tensors

$P_i, p_i$  – die kovarianten Komponenten des Viererimpuls-Vektors

$d\sigma$  – das Linienelement der allgemeinen Relativitätstheorie [bzgl.  $\sigma_K$  s. Text vor (45)]

$c d\Omega \equiv c dt dV$ , wobei  $dV \equiv dx dy dz$

Eine Tilde wie in den erweiterten makroskopisch geglätteten Viererpotentialen  $\tilde{A}_i \equiv A_i + c/e_0 \cdot \partial_i S$ , wobei  $A^k{}_{;k} = 0$ , oder in  $\tilde{s}_i^K \equiv s_i^K + e_K/c \cdot a_i^{\bar{K}}$  kennzeichnen eine Kombination unterschiedlicher Komponenten.

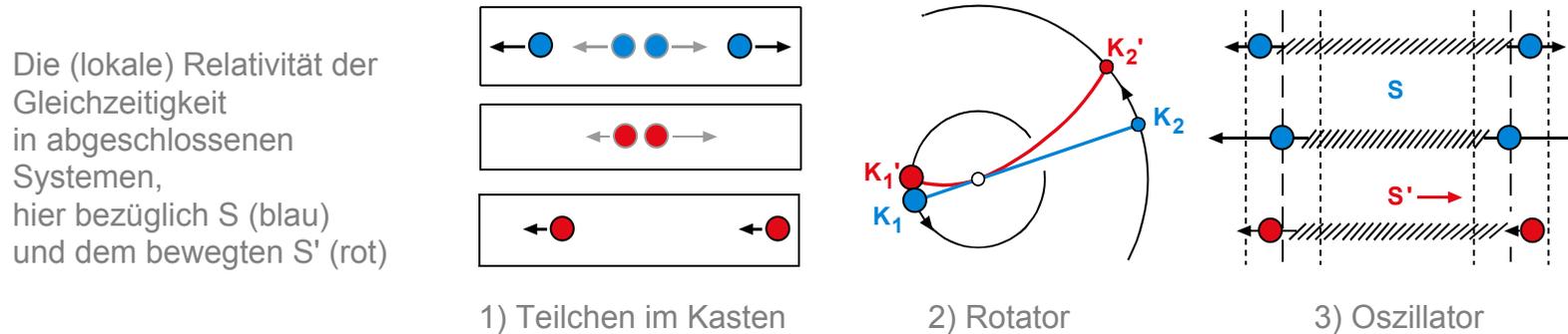
$A, B, C \dots$  (nicht-kursiv) sind explizite Partikelindizes, wobei  $K, L$  (unterschiedliche Anordnungen von) Summanden in symbolischen Summen bezeichnen sollen. Die Indizes  $\bar{K}, \bar{L}$  (Nicht-K, Nicht-L) verlangen dagegen eine sofortige Summierung über alle Teilchen außer  $K, L$ .

$m_K, e_K, \mu_K, \rho_K \equiv m_0, e_0, \mu_0, \rho_0 \equiv$  Ruhemasse, Ladung und ihre Dichten in Bezug auf Teilchen  $K$  [bzgl. der Dichten s. aber auch (31), (32)].

## I) Die dynamischen Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie als Prototypen der Quantenmechanik

Das Energie-Impuls-Postulat 
$$\int T_i^0 dV = P_i \stackrel{!}{=} \text{constant}_i \Big|_{\text{SRT}} \tag{1}$$

verlangt in der SRT die Erhaltungssätze 
$$\partial_k T_i^k = 0. \tag{2}$$



Im Schwerpunktsystem S werden die Umkehrpunkte von je zwei Teilchen (blau) gleichzeitig erreicht. Obwohl sie aber bezüglich S' (rot) vorübergehend beide nach links zu fliegen scheinen (Relativität der Gleichzeitigkeit), ist das Energie-Impuls-Postulat (1) nicht verletzt, wenn nur das betreffende Gesamtsystem (einschließlich Kasten/Faden/Feder) die Erhaltungssätze (2) erfüllt (mit Standardbedingungen von Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrabilität). - Weil makroskopische Objekte letztlich aus geladenen Partikeln bestehen, sind derartige Prozesse immer auch Gegenstand der Elektrodynamik. Aus (2) folgen bei Einsetzung des bisher nur phänomenologisch kombinierten

Energie-Impuls-Tensors 
$$T_{i(\text{conventional})}^k \equiv \left( -F_{il} F^{kl} + \frac{1}{4} \delta_i^k F_{lm} F^{lm} \right) + \mu_0 c^2 U_i U^k \tag{3}$$

bekanntlich die Bewegungsgleichungen 
$$F_{il} J^l = \mu_0 c^2 \frac{dU_i}{d\sigma}. \tag{4}$$

## II) Die Beziehung zwischen der Stromdichte und den elektromagnetischen Potentialen als Schlüssel zu einer notwendigen Erweiterung der Elektrodynamik

Lorentz' Ausdruck für die Stromdichte:  $J^l = \rho_0 U^l$ , (5)

Definition des Feldstärketensors:  $F_{il} \equiv \partial_i \tilde{A}_l - \partial_l \tilde{A}_i$ , (6)

(5), (6)  $\rightarrow$  (4):  $\rho_0 U^l (\partial_i \tilde{A}_l - \partial_l \tilde{A}_i) = \mu_0 c^2 U^l \partial_l U_i$ . (7)

Mit dem denkbar einfachsten Ansatz  $\rho_0 := e_0 \frac{\mu_0}{m_0} \equiv e_0 Q^2$  (8)

ist ein Skalar  $Q$  definiert, der im Falle eines einzelnen Teilchens offenbar dessen Gestalt bestimmt. Dieser Formskalar (die Verteilungsfunktion) wird im folgenden eine entscheidende Rolle spielen.

Mit (8) ist die Lösung von (7) nun  $\tilde{A}_i \stackrel{!}{=} -\frac{m_0 c^2}{e_0} U_i$ , (9)

weil  $U^l \partial_i U_l = 0$  (wegen  $U^l U_l = 1$ ). (9)  $\rightarrow$  (5):  $J^l = -\frac{e_0}{m_0 c^2} \rho_0 \tilde{A}^l$ . (10)

Ohne die bekannte 'Eichinvarianz' (die lange Zeit die physikalische Irrelevanz der elektromagnetischen Potentiale zu beweisen schien) wäre diese Relation (10) ganz inakzeptabel.

Doch mit den erweiterten Potentialen  $\tilde{A}_i \equiv A_i + \frac{c}{e_0} \partial_i S$  (11)

folgt aus (10) nun die Beziehung  $J^l = -\frac{e_0}{m_0 c} Q^2 \left( \partial^l S + \frac{e_0}{c} A^l \right)$  (12)

zwischen Stromdichte und Viererpotential als Schlüssel zu einem konsistenten Variationsprinzip.

### III) Ein erstes konsistentes Variationsprinzip von Elektrodynamik, Gravitation und Quantenmechanik

Das erste konsistente Variationsprinzip, aus dem die Grundgleichungen der einheitlichen Skalar-Vektor-Tensor-Theorie fließen, ist

$$\delta \int \left( \check{\Phi} + \sum_K \hat{\Phi}_K \right) d\Omega = 0, \quad (13)$$

bestehend aus

$$\hat{\Phi}_K \equiv \frac{1}{4} \mathbf{f}_K^{lm} f_{lm}^{\bar{K}} - \frac{1}{2m_K} q_K^2 \left( \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{c} \mathbf{a}_K^l \right) \left( s_l^K + \frac{e_K}{c} a_l^{\bar{K}} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{m}_K c^2 q_K^2 - \frac{\hbar^2}{2m_K} \mathbf{q}_K^l q_l^K, \quad (14)$$

wobei der Index  $\bar{K}$  (non-K) definiert ist durch  $\bar{K} \equiv \sum_{N \neq K}^{(N)}$ , (15)

sowie Einsteins  $2\kappa \check{\Phi} := \mathbf{G} \equiv \sqrt{g} g^{um} g^{sv} g^{rw} \left\{ \Gamma_{v,ur} \Gamma_{w,ms} - \Gamma_{v,um} \Gamma_{w,sr} \right\}$ . (16)

Der dem Teilchen K zugeordnete Anteil der Wirkungsdichte (14) enthält einen auf Anrieb wohlvertraut scheinenden Skalar des elektromagnetischen Feldes, der sich hier allerdings ausschließlich aus Produkten von Feldstärken *verschiedener* Teilchen zusammensetzt. Diese rein wechselseitige Kombination vermeidet alle Probleme von Selbstenergie bzw. Renormalisierung. Doch der eigentliche Grund für diesen Ansatz liegt darin, daß es anders nicht möglich ist, einen konsistenten Energie-Impuls-Tensors zu erhalten, der bzgl. lokaler Inertialsysteme die Erhaltungssätze (2) erfüllt.

Der zweite Anteil von (14) wird sich als Produkt aus Vierer-Stromdichte und den erweiterten elektromagnetischen Potentialen herausstellen, wobei hier vom Schlüssel (12) Gebrauch gemacht ist.

Der dritte Anteil repräsentiert die Dichte der *gebundenen* Ruhemasse [gemäß (44), wohingegen die Dichte der freien Ruhemasse eines Teilchens K in (32) auftritt].

Der letzte Bestandteil ist als denkbar einfachster Ausdruck hinzugefügt, der überhaupt zu einer Gleichung für das Verhalten eines *veränderlichen* Formskalars  $q_K$  führen kann.

### III.1) Ableitung der quantisierten Maxwell'schen Gleichungen durch Variation nach den mikroskopischen elektromagnetischen Potentialen $a_i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_l^A} &= -\frac{1}{m_B} q_B^2 \left[ \frac{e_B^2}{c^2} (\mathbf{a}_A^l + \mathbf{a}_C^l + \dots) + \frac{e_B}{c} \mathbf{s}_B^l \right] - \frac{1}{m_C} q_C^2 \left[ \frac{e_C^2}{c^2} (\mathbf{a}_A^l + \mathbf{a}_B^l + \dots) + \frac{e_C}{c} \mathbf{s}_C^l \right] + \dots \\ \frac{\partial \widehat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_l^B} &= -\frac{1}{m_A} q_A^2 \left[ \frac{e_A^2}{c^2} (\mathbf{a}_B^l + \mathbf{a}_C^l + \dots) + \frac{e_A}{c} \mathbf{s}_A^l \right] - \frac{1}{m_C} q_C^2 \left[ \frac{e_C^2}{c^2} (\mathbf{a}_A^l + \mathbf{a}_B^l + \dots) + \frac{e_C}{c} \mathbf{s}_C^l \right] + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dots \\ \partial_k \left( \frac{\partial \widehat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_{kl}^A} \right) &= \partial_k \left[ \mathbf{f}_B^{kl} + \mathbf{f}_C^{kl} + \dots \right] \\ \partial_k \left( \frac{\partial \widehat{\Phi}_{ABC\dots}}{\partial a_{kl}^B} \right) &= \partial_k \left[ \mathbf{f}_A^{kl} + \mathbf{f}_C^{kl} + \dots \right] \end{aligned} \quad (18)$$

1. Paar als Identität per Definition:  $f_{ik;l}^K + f_{kl;i}^K + f_{li;k}^K \equiv 0$  (19)

2. Paar durch Variation:  $\partial_k \mathbf{f}_K^{kl} \equiv \tilde{\mathbf{j}}_K^l = -\frac{e_K}{m_K c} q_K^2 \left( \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{c} \mathbf{a}_K^l \right)$  , (20)

wobei  $\tilde{\mathbf{j}}_K^l \equiv -\frac{e_K}{m_K c} q_K^2 \tilde{\mathbf{s}}_K^l \equiv -e_K q_K^2 \left( \frac{1}{m_K c} \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{m_K c^2} \mathbf{a}_K^l \right) \equiv e_K q_K^2 (\mathbf{u}_K^l + \mathbf{w}_K^l) \equiv \rho_K \tilde{u}_K^l \equiv (\tilde{\rho}_K, \frac{1}{c} \tilde{\mathbf{j}}_K)$ .

In den quantisierten Maxwell'schen Gleichungen (20) tritt nicht das elektromagnetische Potential des jeweiligen Teilchens K auf, sondern die Potentiale *aller anderen* Teilchen  $\bar{K}$ .

### III.2) Ableitung der kovarianten Wellengleichung durch Variation nach der Gestaltsfunktion $q_K$

Mit 
$$\partial_l \left( \frac{\partial \widehat{\Phi}_K}{\partial q_l^K} \right) = \frac{\partial \widehat{\Phi}_K}{\partial q^K} \quad (21)$$

und 
$$\frac{\partial \widehat{\Phi}_K}{\partial q^K} = -\mathbf{q}_K \left[ \frac{1}{m_K} \widetilde{s}_K^l \widetilde{s}_l^K - m_K c^2 \right] \quad (22)$$

folgt aus 
$$\partial_l \left( \frac{\partial \widehat{\Phi}_K}{\partial q_l^K} \right) = -\frac{\hbar^2}{m_K} \partial_l \mathbf{q}_K^l \quad (23)$$

die reelle Wellengleichung 
$$\hbar^2 q_{K;l}^l = q_K \left[ \left( s_K^l + \frac{e_K}{c} a_{\overline{K}}^l \right) \left( s_l^K + \frac{e_K}{c} a_l^{\overline{K}} \right) - m_K^2 c^2 \right] \quad (24)$$

für die Gestaltfunktion  $q_K$  in kovarianter Form. Mit  $\hbar \rightarrow 0$  geht diese Wellengleichung über in die konventionelle Hamilton-Jacobi-Gleichung für geladene Teilchen im äußeren elektromagnetischen Feld. Die Verteilung eines willkürlich herausgegriffenen Teilchens  $K$  bleibt unverändert, solange gilt

$$\dot{q}_K = 0, \quad (25)$$

und ein konstanter Parameter 
$$\dot{s}_K \stackrel{!}{=} \text{constant} \Big|_t := -\varepsilon_K \quad (26)$$

existiert. Die Beziehungen (25), (26) definieren also mögliche stationäre Zustände von Teilchen, sofern entsprechende stetige und differenzierbare Lösungen existieren.

### III.3) Ableitung der Kontinuitätsgleichung für Ruhemasse und Ladung durch Variation nach dem mikroskopischen Wirkungsskalar $s_K$

Mit

$$\frac{\partial \hat{\Phi}_K}{\partial s^K} = 0 \quad (27)$$

und

$$\partial_l \left\{ \frac{\partial \hat{\Phi}_K}{\partial s_l^K} \right\} = -\frac{1}{m_K} \partial_l \left\{ q_K^2 \left( \mathbf{s}_K^l + \frac{e_K}{c} \mathbf{a}_K^l \right) \right\} \quad (28)$$

folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\tilde{j}_{K;l}^l \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_l \tilde{\mathbf{j}}_K^l = 0 \quad (29)$$

in kovarianter Form. Diese gilt nicht nur für die Ladung, sondern entsprechend auch für die Ruhemasse, weil deren Dichten in (8) als direkt proportional vorausgesetzt wurden. Es ist von weitreichender Bedeutung, daß dieselbe Kontinuitätsgleichung (29) auch bereits aus dem 2. Paar (20) der Maxwell'schen Gleichungen resultiert.

Die natürliche Normierung

$$-\frac{1}{m_K c^2} \int q_K^2 \left( \dot{\mathbf{s}}_K + e_K \mathbf{a}_K^0 \right) dV \stackrel{!}{=} 1 \quad (30)$$

bedeutet

$$\int \tilde{\rho}_K dV \stackrel{!}{=} e_K \equiv \pm e \quad (31)$$

und mit Rücksicht auf (8) zugleich

$$\int \tilde{\mu}_K dV \stackrel{!}{=} m_K . \quad (32)$$

### III.4) Ableitung der Einsteinschen Gleichungen und ein quantisierter Energie-Impuls-Tensor durch Variation nach dem Fundamentaltensor $g_{ik}$

Der neue [\*] Variationsausdruck 
$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial g^{ik}} + g_{ia} g_{kb} \partial_l \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial g_{lab}} \right) = -2\kappa \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial g^{ik}} \quad (33)$$

ergibt Einsteins Gleichungen 
$$\mathbf{E}_{ik} \equiv \mathbf{R}_{ik} - \frac{1}{2} \mathbf{R} g_{ik} = \kappa \mathbf{T}_{ik} \quad (34)$$

mit einem Quanten-Tensor der Materie 
$$\mathbf{T}_{ik} \equiv \sum_{\mathbf{K}} \mathbf{T}_{ik}^{\mathbf{K}}, \quad (35)$$

wobei 
$$\mathbf{T}_{ik}^{\mathbf{K}} = -\frac{1}{2} \left( f_{im}^{\bar{\mathbf{K}}} \mathbf{f}_k^{\mathbf{K}m} + \mathbf{f}_{km}^{\bar{\mathbf{K}}} f_i^{\mathbf{K}m} \right) + \frac{1}{m_{\mathbf{K}}} q_{\mathbf{K}}^2 \tilde{s}_i^{\mathbf{K}} \tilde{s}_k^{\mathbf{K}} + \frac{\hbar^2}{m_{\mathbf{K}}} q_i^{\mathbf{K}} \mathbf{q}_k^{\mathbf{K}} + \frac{1}{4} \mathbf{g}_{ik} \left[ f_{\mathbf{K}}^{lm} f_{lm}^{\bar{\mathbf{K}}} - \frac{\hbar^2}{m_{\mathbf{K}}} \left( q_{\mathbf{K}}^2 \right)_{;l} \right]. \quad (36)$$

Die Ableitung der Einsteinschen Gleichungen bringt also zugleich eine konsistenten Vervollständigung durch den quantisierten Energie-Impuls-Tensor (35) mit sich. Dieser geht für neutrale Materie ( $f_{ik}^{\mathbf{K}} = 0$ ) mit  $\hbar \rightarrow 0$  näherungsweise in den bisherigen phänomenologischen über [s. (52)], der nicht länger nachträglich 'angeklebt' werden muß. Demzufolge impliziert das Variationsprinzip (13) nun auch

mit 
$$E_{i;k}^k = \kappa T_{i;k}^k \equiv \frac{\kappa}{\sqrt{\mathbf{g}}} \left( \partial_k \mathbf{T}_i^k - \frac{1}{2} \mathbf{T}^{lm} g_{ilm} \right) = 0 \quad (37)$$

für neutrale Materie wegen 
$$\partial_k \left( \mu_{\mathbf{K}} \tilde{u}_{\mathbf{K}}^k \right) = 0 \quad (38)$$

die 'geodätischen' Bewegungsgleichungen 
$$\frac{d\tilde{u}_i^{\mathbf{K}}}{d\sigma} - \frac{1}{2} \tilde{u}_{\mathbf{K}}^k \tilde{u}_{\mathbf{K}}^l \partial_i g_{kl} = 0. \quad (39)$$

## IV) Ableitung von Klein-Gordon-Gleichung und Schrödinger-Gleichung in ihrer komplexen Form

Eine Substitution in (23), (28) von  $q_K \equiv \sqrt{\psi_K \psi_K^*}$  (40)

und  $s_K \equiv -\frac{i\hbar}{2} \ln(\psi_K / \psi_K^*)$  (41)

ergibt die Klein-Gordon-Gleichung 
$$\left( i\hbar \partial_t - \frac{e_K}{c} a_l^{\bar{K}} \right) \left( i\hbar \partial^l - \frac{e_K}{c} a_K^l \right) \psi_K = m_K^2 c^2 \psi_K$$
 (42)

in kovarianter Form für 
$$\psi_K \equiv q_K e^{i s_K / \hbar} .$$
 (43)

Bei Verwendung als Resubstitution ist es mit (43) auch sehr einfach, diese umgekehrt durch nachträgliche Ableitung der Grundgleichungen (24), (29) aus der komplexen Klein-Gordon-Gleichung (42) zu verifizieren.

Laues Theorem impliziert hier 
$$\int \left| \psi_{KV}^{(\text{stationary})} \right|^2 dV \stackrel{!}{=} \frac{\mathcal{E}_{KV}}{m_K c^2} \equiv 1 + \frac{\Delta \mathcal{E}_{KV}}{m_K c^2} .$$
 (44)

Daraus ist sofort ersichtlich, daß der komplexe Quantenskalar  $\psi_K$  der Klein-Gordon-Gleichung einer von 1 verschiedenen, unkonventionellen Normierung unterliegt. Die zu (44) äquivalente Normierung in Form von (31), (32) wird sich als einzige herausstellen, die exakt zu Plancks Energie-Frequenz-Beziehung für Übergänge im elektrischen Feld führt [s. dazu (57)  $\rightarrow$  (58)].

Eine alternative Substitution gemäß  $\chi_K \equiv Q_K e^{i s_K / \hbar}$ , wobei  $s_K \equiv -m_K c^2 t + \sigma_K(t, r)$ , führt näherungsweise mit  $c \rightarrow \infty$  und  $1/c^2 |\dot{\sigma}_K + e_K \varphi_{\bar{K}}| \ll m_K$  sofort zur fundamentalen

Schrödinger-Gleichung 
$$(i\hbar \partial_t - e_K \varphi_{\bar{K}}) \chi_K - \frac{1}{2m_K} \left( i\hbar \vec{\nabla} + \frac{e_K}{c} \vec{a}_{\bar{K}} \right)^2 \chi_K \approx 0 .$$
 (45)

## V) Nachweis der Konsistenz des Energie-Impuls-Spannungs-Tensor und dessen Skalar-, Vektor- und Tensor-Anteile

Die natürlichen Bestandteile von  $T_{ik}^L \equiv L_{ik}^L + M_{ik}^L + Q_{ik}^L$  (46)

sind der Tensor-Anteil  $L_{ik}^L \equiv -f_{im}^{\bar{L}} f_k^{Lm} + \frac{1}{4} g_{ik} f_{lm}^{\bar{L}} f_L^{lm}$  {Feldstärken}, (47)

der Vektor-Anteil  $M_{ik}^L \equiv \frac{1}{m_L} q_L^2 \left( s_i^L + \frac{e_L}{c} a_i^{\bar{L}} \right) \left( s_k^L + \frac{e_L}{c} a_k^{\bar{L}} \right)$  {erweiterte Potentiale}, (48)

und der Skalar-Anteil  $Q_{ik}^L \equiv \frac{\hbar^2}{m_L} \left[ q_i^L q_k^L - \frac{1}{4} g_{ik} (q_L^2)_{,l}^l \right]$  {Gestaltsfunktion}. (49)

Der Skalar-Anteil (49) des Energie-Impuls-Tensors beinhaltet offensichtlich Beiträge, die auf die veränderliche Gestalt des jeweiligen *ausgedehnten* Teilchens L (bzw. K) zurückzuführen sind. Es sind gerade diese inneren Beiträge, die sich bei 'klassischer' Voraussetzung fiktiver Punktteilchen als Heisenbergs 'Unschärfen' oder z. B. auch als Nullpunktsenergie bemerkbar machen.

Eine direkte SRT-Berechnung  $\partial_k T_{iL}^k = \frac{1}{2} (f_L^{km} \partial_k f_{im}^{\bar{L}} - f_{\bar{L}}^{km} \partial_k f_{im}^L)$  (50)

beweist die (paarweise) Gültigkeit von  $\partial_k \sum_{L/K} T_{iL/K}^k = 0$ . (51)

Mit  $\hbar \rightarrow 0$  gilt phänomenologisch  $T_{ik}^{\text{Staub}} \approx M_{ik}^{\text{Staub}} \approx \sum_L \frac{1}{m_L} q_L^2 S_i^L S_k^L = \sum_L \mu_L c^2 U_i^L U_k^L$ . (52)

## VI) Identifizierung der Elektronenenergie mit dem Stationaritäts-Parameter $\varepsilon_K$ durch Berechnung aus dem Energie-Impuls-Tensor des H-Atoms

Energie-Impuls-Tensor des H-Atoms:

$$T_{i(H)}^k = T_{i(e)}^k + T_{i(p)}^k . \quad (53)$$

Potentiale (ohne Spin):

$$\boxed{a_p^l = \left[ \varphi_p = \frac{+e}{r}, \vec{0} \right],} \\ \boxed{a_e^l = \left[ \varphi_e(\vec{r}), \vec{a}_e(\vec{r}) \right].} \quad (54)$$

Stationäre KG-Lösungen:

$$\psi_{(e,p)V} \equiv q_{(e,p)V}(\vec{r}) e^{-i\varepsilon_{(e,p)V}t/\hbar + i s_{(e,p)V}^{\text{spatial}}(\vec{r})/\hbar} . \quad (55)$$

Die Energiedichten (36):

$$\boxed{T_{0(e)}^{0(\text{stationary})} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi_e \vec{\nabla} \varphi_p + \frac{\tilde{\rho}_e}{e_e} (\varepsilon_e - e_e \varphi_p) + \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{m_e} \Delta(q_e^2),} \\ \boxed{T_{0(p)}^{0(\text{stationary})} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi_e \vec{\nabla} \varphi_p + \frac{\tilde{\rho}_p}{e_p} (\varepsilon_p - e_p \varphi_e) + \frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{m_p} \Delta(q_p^2).} \quad (56)$$

Energie des H-Atoms:

$$E_{(H)}^{(\text{stationary})} \equiv \int T_{0(H)}^{0(\text{stationary})} dV = \varepsilon_e \int \frac{\tilde{\rho}_e}{e_e} dV + \int \left[ \frac{\tilde{\rho}_p}{e_p} (\varepsilon_p - e_p \varphi_e) \right] dV . \quad (57)$$

Mit  $\varepsilon_p \equiv m_p c^2 + \Delta\varepsilon_p$ :

$$E_{(H)\infty}^{(\text{stationary})} = \varepsilon_e + m_p c^2 + \lim_{m_p \rightarrow \infty} \int \frac{\tilde{\rho}_p}{e_p} (\Delta\varepsilon_p - e_p \varphi_e) dV . \quad (58)$$

Weil  $\lim \int \dots dV \rightarrow 0$ :

$$\boxed{E_{(H)\infty}^{(\text{stationary})} = \varepsilon_e V + m_p c^2} . \quad (59)$$

Am Beispiel des H-Atoms ist also der in (26) definierte, bisher mysteriös gebliebene Stationaritäts-Parameter  $\varepsilon_K$  als *Energie-Integral* eines gebundenen Teilchens K erwiesen.

## VII) Die Energie-Frequenz-Beziehung für das H-Atom und ein photonenkompatibles Konzept elektromagnetischer Wellen

Die Energie-Frequenz-Beziehung ist nun unter Einbeziehung einer Erkenntnis Schrödingers leicht zu verstehen, der seinerzeit allerdings nicht auf die hier abgeleitete Identität des Stationaritäts-Parameters mit dem Energie-*Integral* zurückgreifen konnte.

Eine zeitweilige Überlagerung 
$$\psi_{(e)} \equiv \psi_1 + \psi_2 \quad (60)$$

bedeutet eine Ladungsdichte 
$$\tilde{\rho}_{(e)} = \tilde{\rho}_{(e)} + \frac{-e}{m_e c^2} \left[ \varepsilon_{(e)1} + \varepsilon_{(e)2} + 2e\varphi_{(p)} \right] q_1 q_2 \cos[\omega_{12} t + \delta_{21}(\vec{r})], \quad (61)$$

die offensichtlich mit einer Frequenz

$$\omega_{12} \equiv \frac{|\varepsilon_{12}|}{\hbar} \quad (62)$$

oszilliert, wobei der Ausdruck

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{(e)1} - \varepsilon_{(e)2} \quad (63)$$

nach (59) als Energie-Differenz erwiesen ist - fertig! Das bisherige Konzept elektromagnetischer Wellen ist also dahingehend zu modifizieren, daß a) ein Energiequantum der Strahlung durch deren Frequenz determiniert ist, und daß b) das Feld eines einzelnen Teilchens allein weder Energie noch Impuls tragen kann (*virtuelle* Photonen). Letzteres ist unmittelbar aus dem Feldstärken-Anteil des

Energie-Impuls-Tensors 
$$L_{i(H)}^k = -f_{il}^p f_e^{kl} - f_{il}^e f_p^{kl} + \frac{1}{2} \delta_i^k f_e^{lm} f_{lm}^p \quad (64)$$

erkennbar, wobei im Falle des H-Atoms mit 
$$f_{ik}^p \approx \frac{m_e}{m_p} f_{ik}^e \quad (65)$$

die *überlagerten* Felder von Elektron und Proton die Energie und den Impuls tragen (*reale* Photonen), weil ihre Ladungsverteilungen während der Übergänge *in Phase* oszillieren (Bestätigung durch Verwendung der *reduzierten* e-Masse). Nach geeigneter Definition effektiver (geometrisch gemittelter) Feldstärken  $f_{ik}$  ergibt sich zuletzt näherungsweise der übliche Ausdruck  $L_{ik} = -f_{il} f^{kl} + 1/4 \delta_i^k f_{lm} f^{lm}$ .

## Entwicklung und Perspektive im Überblick: Schritte zu einem konsistenten Variationsprinzip von Feld und Materie

Larmor (1900):

$$S = \int \left[ \frac{1}{4} F^{lm} F_{lm} + A_l j^l \right] d\Omega, \quad (66)$$

Hilbert (1915):

$$S = \int \left[ \frac{1}{4} \mathbf{F}^{lm} F_{lm} + A_l \mathbf{j}^l + \frac{1}{\kappa} \mathbf{R} \right] d\Omega, \quad (67)$$

Weyl/a (1918):

$$S = \int \left[ \frac{1}{4} \mathbf{F}^{lm} F_{lm} + A_l \mathbf{j}^l + \mu_0 c^2 + \frac{1}{\kappa} \mathbf{G} \right] d\Omega, \quad (68)$$

Weyl/b (1918):

$$S = \frac{1}{4} \int \mathbf{F}^{ik} F_{ik} d\Omega + \sum \frac{e_0}{c} \int A_i dx^i + \sum m_0 c \int ds + \frac{1}{\kappa} \int \mathbf{G} d\Omega, \quad (69)$$

Hier (2006):

$$S = \int \left[ \sum_{\mathbf{K}} \left( \frac{1}{4} \mathbf{f}_{\mathbf{K}}^{lm} f_{lm}^{\bar{\mathbf{K}}} + \frac{1}{2} \tilde{a}_l^{\bar{\mathbf{K}}} \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbf{K}}^l + \frac{1}{2} \mu_{\mathbf{K}} c^2 - \frac{\hbar^2}{2m_{\mathbf{K}}} \mathbf{q}_{\mathbf{K}}^l q_l^{\mathbf{K}} \right) + \frac{1}{2\kappa} \mathbf{G} \right] d\Omega, \quad [\text{s. (13)}]. \quad (70)$$

Als nächstliegende Erweiterung dieses erstmalig *konsistenten* Variationsprinzips zur zusätzlichen Erfassung von Polarisierungseffekten und Eigendrehimpulsen (Dirac-Gleichung) bietet sich an:

$$S = \int \left\{ \sum_{\mathbf{K}} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{p}_{\mathbf{K}}^{lm} + \frac{1}{2} \mathbf{f}_{\mathbf{K}}^{lm}) f_{lm}^{\bar{\mathbf{K}}} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbf{K}\nu}^l \beta_{\mu}^{\nu} \tilde{a}_l^{\bar{\mathbf{K}}\mu} + \frac{1}{2} m_{\mathbf{K}} c^2 \mathbf{q}_{\mathbf{K}\nu} \beta_{\mu}^{\nu} q^{\mathbf{K}\mu} - \frac{\hbar^2}{2m_{\mathbf{K}}} \mathbf{q}_{\mathbf{K}\nu}^l \beta_{\mu}^{\nu} q_l^{\mathbf{e}\mu} \right] + \frac{1}{2\kappa} \mathbf{G} \right\} d\Omega \quad (71)$$

mit

$$\mathbf{p}_{\mathbf{K}}^{lm} \equiv \frac{i}{4} \frac{e_{\mathbf{K}} \hbar}{m_{\mathbf{K}}} \left( \bar{\Psi}_{\mathbf{K}} \gamma^l \gamma^m \Psi_{\mathbf{K}} - \bar{\Psi}_{\mathbf{K}} \gamma^m \gamma^l \Psi_{\mathbf{K}} \right). \quad (72)$$

Doch der zugehörige Energie-Impuls-Tensor, der die Erhaltungssätze von Energie und Impuls erfüllt, scheint dann nicht mehr mit demjenigen übereinzustimmen, der sich aus der Variation nach den  $g_{ik}$  ergibt [\*]. Dies wirft neue Fragen auf (z.B. *mikroskopisches* Äquivalenzprinzip vs. Windungstensor).